Domácí úkol 1 NOFY151 Matematická analýza I

vypracoval Jiří Sýkora

Zadání

(1) Z definice dokažte (k ε najděte δ), že

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \tag{1}$$

(2) Mějme zadané číslo $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Rozhodněte, pro která reálná čísla a existuje limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+ax)^{\mathrm{n}} - (1+anx+3ax^2)}{4x^3+ax^4} \tag{2}$$

a čemu se v takovém případě rovná (najděte všechny možnosti).

(3) Najděte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+2x+1}} \tag{3}$$

Řešení

(1) Snadno vidíme, že vzhledem ke spojitosti funkce x^2 bude tato limita rovna 4. Důkaz provedeme přímo z definice limity

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in P_\delta(2) \implies x^2 \in U_\varepsilon(4)$$

Jinak řečeno, k jakémukoliv $\varepsilon > 0$ tedy najdeme takové $\delta > 0$, že bude platit

$$0 < |x-2| < \delta \implies |x^2-4| < \varepsilon$$

Ještě před tím než začneme se samotným důkazem, spočteme jaké δ je vhodné.

$$|x^2-4| = |x-2||x+2| < \delta|x+2|$$

Zde jsme využili předpokladu, že $0 < |x-2| < \delta$. Abychom spočetli druhou absolutní hodnotu, zadefinujeme $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ a položíme $\delta_1 = 1$, čímž obsáhneme možnost pro příliš velká ε. Nyní dopočteme δ_2, po kterém budeme chtít, aby bylo menší jak jedna, a proto bude platit

$$|x-2| < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 5$$

A proto

$$|x^2-4| < 5\delta$$

Stačí tedy zvolit $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$.
Nyní provedeme samotný důkaz.+ Nechť $\varepsilon > 0$, vyberme $\delta = \min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\}$. Pak

$$|x^2-4| < 5\delta < \varepsilon$$

$\square$

(2) Začneme tím, že si tvar této limity nejprve upravíme pomocí binomického rozvoje.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^{\mathrm{n}}-(1+anx+3ax^2)}{4x^3+ax^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ax)^k-(1+anx+3ax^2)}{4x^3+ax^4}$$

Což lze dále upravit tak, že si vypíšeme první tři členy a vytknene x^2 ve jmenovateli.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^k+1+anx+\frac{n(n-1)}{2}a^2x^2-(1+anx+3ax^2)}{x^2(4x+ax^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^k+\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)ax^2}{x^2(4x+ax^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{k-2}+\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2}$$

Nyní si limitu rozdělíme na dva zlomky a upravíme je, abychom si ulehčili budoucí výpočty.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2}+\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{k-2}}{4x+ax^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2}+\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{k-3}}{4+ax}$$

Jestliže má být limita definovaná, musí se shodovat její limita zleva a zprava. Ukážeme si postupně, že pro $\frac{n(n-1)}{2}a^2-3a>0$ a pro $\frac{n(n-1)}{2}a^2-3a<0$ tato podmínka není splněna.

1) $\frac{n(n-1)}{2}a^2-3a>0$

   (a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2}+\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{k-3}}{4+ax}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{k-3}}{4+ax}$$
$$=\infty+const.=\infty$$

   Kde využíváme toho, že čitatel prvního zlomku je konstantní a tedy až na znaménko nemůže ovlivnit výsledek limity, jakmile jde jmenovatel k nule.

   (b) Když se ale přibližujeme zleva a uvědomíme si, že jelikož je $x=0$ kořenem $4x+ax^2$, pak to ale znamená, že protíná osu x, a tudíž musí být z jedné strany kladná a z druhé záporná. To kde je kladná a kde záporná lze snadno zjistit podle koeficientu a, který je zároveň koeficientem u x^2, a tedy určuje tvar paraboly.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2}+\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{k-3}}{4+ax}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2}+\lim_{x\to 0^-}\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{k-3}}{4+ax}$$
$$=-\infty+const.=-\infty$$

   Jelikož se jednostranné limity neshodují, pak musí být daná limita nedefinovaná.

2) Totéž uděláme pro $\frac{n(n-1)}{2}a^2-3a<0$

   (a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2}+\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{k-3}}{4+ax}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{k-3}}{4+ax}$$
$$=-\infty+const.=-\infty$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}a-3\right)a}{4x+ax^2} + \lim_{x\to 0^-} \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax}$$
$$= \infty + const. = \infty$$

A zde se taktéž limity neshodují.

3) Zbývá tedy poslední možnost - a to zkusit $\frac{n(n-1)}{2}a^2-3a=0$. To nastane ve dvou případech: $a=0$ a $a=\frac{6}{n(n-1)}$.

(a) $a=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}-3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax} = \lim_{x\to 0} 0+0=0$$

(b) $a=\frac{6}{n(n-1)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}-3\right)a}{4x+ax^2} + \frac{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}a^k x^{k-3}}{4+ax} = 0+\frac{36(n-2)}{4n^2(n-1)^2} = \frac{36(n-2)}{4n^2(n-1)^2}$$

Závěr: Limita existuje pouze pro $a_1=0$ a $a_2=\frac{6}{n(n-1)}$ a je v té chvíli rovna 0 a $\frac{36(n-2)}{4n^2(n-1)^2}$ respektivně.

(3) Abychom tuto limitu mohli vypočítat, budeme muset provést algebraické úpravy, které nás dovedou k výhodnějšímu tvaru. Na první pohled se tak nabízí usměrnění jmenovatele, načež bychom ho pak mohli zdárně vykrátit s některým členem v čitateli a limitu snadno dopočíst. Musíme tedy vyřešit otázku, jak usměrnit rozdíl dvou třetích odmocnin? Využijeme vztahu

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

A tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x-8)\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+2x+1)}+\sqrt[3]{(x^2+2x+1)^2}\right)}{x^2+1-(x^2+2x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x-8)\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+2x+1)}+\sqrt[3]{(x^2+2x+1)^2}\right)}{-2x}$$

A jestliže zkrátíme členem x, tak se úloha stává triviální.

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2}(x-8)\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+2x+1)}+\sqrt[3]{(x^2+2x+1)^2}\right)\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}(-8)\left(\sqrt[3]{(+1)^2}+\sqrt[3]{(+1)(+1)}+\sqrt[3]{(+1)^2}\right)\right) = 12$$

Závěr: Limita (3) je podle výpočtu výše rovna 12.